SUR LES CLASSES V NORMALES*

PAR

MAURICE FRÉCHET

Considérons une classe (Δ) d'éléments de nature quelconque mais satisfaisant aux conditions suivantes:†

1° C'est une classe (L). 2° Elle est parfaite. 3° Elle est compacte. 4° Si tous les éléments limites d'une suite infinie d'éléments de la classe (suite qui a nécessairement au moins un élément limite d'après 3°) coïncident, cette suite est convergente. 5° A tout élément A de (Δ) correspond une suite infinie dénombrable d'ensembles fermés $Q_i(A)$ possédant les propriétés suivantes: *a*) $Q_{i+1}(A)$ appartient à $Q_i(A)$; *b*) à tout entier m correspond un entier n tel que tout Q_n à qui appartient un élément B appartient à $Q_m(B)$ quel que soit B; *c*) A est *intérieur* à tous les $Q_i(A)$; *d*) les ensembles $Q_1(A), Q_2(A), \cdots, Q_n(A), \cdots$ ont un seul élément commun, à savoir A.

Les théorèmes que vous établissez à partir du Théorème 8 sont démontrés pour une classe satisfaisant aux conditions précédentes énoncées, soit explicitement, soit implicitement comme pour 4° dans la démonstration du Théorème 7, ou pour 2° par suite de la légère différence dans la définition du mot "intérieur" que vous me signalez. Votre classe (D) est soumise en outre à la condition—*dont je n'aurai pas besoin*—que tout ensemble dérivé est fermé et de plus votre "enclosable property" est *un peu* plus restrictive que la condition 5° ci-dessus.

Ceci étant, je vais démontrer d'abord que: *toute classe* (Δ) *est une classe V normale. Il en résultera que les théorèmes que vous démontrez pour la classe* (Δ) *peuvent être considérés comme déjà démontrés dans ma Thèse.* (Sur quelques points du Calcul Fonctionnel, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1906, t. 22, pp. 1–74).‡

Par contre les théorèmes où vous ne faites pas usage de l' "enclosable property" *restent essentiellement nouveaux et constituent une importante généralisation.*

---

* Extract from a letter to Professor E. R. HEDRICK concerning his paper: *On Properties of a Domain for which any Derived Set is Closed*, these Transactions, vol. 12 (1911), p. 285. Presented to the Society, April 26, 1913.

† J'adopte votre terminologie en ajoutant seulement au sens de l'expression: A intérieur à E, la condition que A appartient à E.

‡ Je dois d'ailleurs à l'obligeance de M. T. H. HILDEBRANDT (Ann Arbor) la remarque que la démonstration du théorème de BOREL que j'ai donnée dans ma Thèse page 26 pour une classe V normale s'étend immédiatement à une classe V parfaite si l'on tient compte des résultats de mon second mémoire des Rendiconti de Palerme (Les ensembles abstraits et le Calcul Fonctionnel, 1910, t. 30, pp. 1–26).

M. SIGISMOND JANIZSEWSKI m'avait exprimé verbalement l'opinion très juste qu'il y aurait avantage à ne pas faire intervenir dans la définition de la limite la notion de nombre irrationnel qui entre dans ma définition du voisinage. J'attribue à votre notion d'ensemble "enclosable" un grand intérêt du fait qu'elle répond en effet à ce desideratum d'une manière naturelle. (On pourrait d'ailleurs y arriver simplement aussi en remplaçant le voisinage par une fonction convenable du voisinage, fonction qui ne prendrait que des valeurs inverses de valeurs entières.)

Pour démontrer la proposition annoncée je ferai d'abord deux remarques.

1° En remplaçant au besoin les $Q_i(A)$ convenablement je pourrais supposer que, quel que soit A, $Q_1(A)$ soit formé de la classe (Δ) toute entière.

2° Etant donnés deux éléments distincts A, B, il existe un entier β tel que A appartienne à $Q_1(B)$, $Q_2(B)$, $\cdots$, $Q_\beta(B)$ et n'appartienne pas à $Q_{\beta+1}(B)$. En effet A appartient au moins à $Q_1(B) \equiv \Delta$; s'il appartient à $Q_i(B)$, il appartient à $Q_{i-1}(B)$; et enfin il n'appartient pas à tous les $Q(B)$ sans quoi il coïnciderait avec leur seul élément commun B. De même il existe un nombre α tel que B appartienne à $Q_1(A)$, $\cdots$, $Q_\alpha(A)$ et non à $Q_{\alpha+1}(A)$.

Définition du voisinage.—J'appellerai maintenant voisinage de deux éléments A, B et je désignerai par la notation (A, B) un nombre égal à zéro si A, B coïncident et à l'inverse du plus petit des deux nombres α, β définis précédemment si A, B sont distincts. On voit que A appartiendra aux $Q(B)$ et B aux $Q(A)$ au moins jusqu'au rang $1/(A, B)$.

Il faut d'abord montrer I. qu'une telle définition satisfait bien aux conditions imposées au voisinage dans ma Thèse, II. qu'elle fournit les mêmes suites convergentes et les mêmes éléments limites que ceux qui sont donnés par la définition de Δ.

I. En ce qui concerne le premier point, il suffit de montrer qu'on peut former une fonction $f(\epsilon) > 0$ et tendant vers zéro avec ϵ, telle que les inégalités

$$(1) \qquad (A, C) \leq \epsilon, \qquad (B, C) \leq \epsilon$$

entraînent $(A, B) \leq f(\epsilon)$. Comme d'après sa définition le voisinage est ici toujours ≤ 1, je pourrais prendre $f(\epsilon) = 1$ pour $\epsilon \geq 1$ et ne me préoccuper que des valeurs de $\epsilon < 1$. Je ferai encore quelques remarques préliminaires.

3° Si m et n sont deux nombres satisfaisant à la propriété b) de la condition 5°, il en sera de même de tout couple m', n' où $m' \leq m$ et $n' \geq n$, d'après la propriété a).

4° Si au lieu de se donner m, on se donne un entier quelconque n, il y a un entier correspondant bien déterminé $\phi(n)$ tel que n et m jouissent de la propriété b) pour $m \leq \phi(n)$ et n'en jouissent plus pour $m > \phi(n)$. En effet, on peut prendre au moins $m = 1$; si m_0 est admissible pour m, alors $1, 2, \cdots, m_0 - 1$ le sont aussi; enfin si à un entier n correspondaient pour m toutes les valeurs entières, tout Q_n à qui appartiendrait un élément B appartiendrait à $Q_1(B)$, $Q_2(B)$, $\cdots$ et par suite se réduirait à leur seul élément commun B. En particulier $Q_n(B)$ se réduirait à B ce qui est impossible (Δ étant parfait), si l'on tient compte de la condition c).

5° D'après la remarque 3° on voit que $\phi(n+1) \geq \phi(n)$. La fonction $\phi(n)$ ne peut d'ailleurs être bornée. Car si elle restait inférieure à l'entier μ, à celui-ci, considéré comme valeur de m, correspondrait, d'après b), une valeur finie ν de n et on aurait $\phi(\nu) \geq \mu$. Ainsi $\phi(n)$ est une fonction monotone de l'entier n, fonction qui tend vers l'infini avec n.

Revenons maintenant aux inégalités (1). ϵ étant supposé plus petit que 1, à chaque valeur de $\epsilon > 0$ correspond un entier N tel que $1/(N+1) < \epsilon \leq 1/N$. On aura donc $(A, C) \leq 1/N$, c'est à dire, que C appartiendra aux $Q(A)$ au moins jusqu'au rang N. Si donc $i \leq N$, C appartiendra à $Q_i(A)$, donc $Q_i(A)$ appartiendra à $Q_{\phi(i)}(C)$. Mais si l'on suppose également $\phi(i) \leq N$, B qui appartient comme les A aux $Q(C)$ jusqu'au rang N, appartiendra à $Q_{\phi(i)}(C)$; donc $Q_{\phi(i)}(C)$ appartiendra à $Q_{\phi(\phi(i))}(B)$. En définitive, si $i \leq N$ et $\phi(i) \leq N$, A appartiendra à $Q_{\phi(\phi(i))}(B)$: le nombre β défini au 2° sera au moins égal à $\phi(\phi(i))$; il en sera de même de α; donc $(A, B) \leq 1/\phi(\phi(i))$.

Si maintenant $N \geq \phi(1)$, il y a au moins un entier i tel qu'on ait à la fois $i \leq N$, $\phi(i) \leq N$. Le plus grand de ces nombres i est un nombre $\psi(N)$ bien déterminé. La fonction $\psi(N)$ est monotone et tend vers l'infini avec N, comme $\phi(N)$. Et d'après ce qui précéde, on a $(A, B) \leq 1/\phi(\phi(\psi(N)))$. Enfin N est une fonction déterminée de ϵ, $N(\epsilon)$, qui est monotone et croît indéfiniment quand ϵ tend vers zéro. Si donc on pose

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\phi(\phi(\psi(N(\epsilon))))}, \qquad \text{pour } \epsilon \leq \frac{1}{\phi(1)},$$

et

$$f(\epsilon) = 1, \qquad \text{pour } \epsilon > \frac{1}{\phi(1)},$$

on voit qu'on aura, comme conséquence de (1),

$$(A, B) \leq f(\epsilon),$$

$f(\epsilon)$ étant une fonction > 0 qui tend vers zéro avec $\epsilon > 0$ *et qui est indépendante de* A, B, C.

II. Jusqu'ici la notion d'éléments limites dans Δ n'est même pas intervenue. Supposons que les suites convergentes dans Δ et leurs limites soient définies de façon à satisfaire aux conditions imposées à Δ. Je vais montrer que si $A_1, A_2, \cdots, A_p, \cdots$ est une suite convergente vers B, le voisinage (B, A_n) tend vers zéro et réciproquement.

Si la suite des A_p converge vers B, comme B est *intérieur* à $Q_n(B)$, les A_p doivent appartenir à $Q_n(B)$ à partir d'un certain rang p_n. Mais alors $Q_n(B)$ appartient à $Q_{\phi(n)}(A_p)$ pour $p > p_n$. Donc pour $p > p_n$, les nombres

α, β définis au n° 2° et relatifs ici à A_p et B seront respectivement au moins égaux à $\phi(n)$ et n; ils seront donc au moins égaux au plus petit de ces deux-ci que nous pourrons désigner par $\theta(n)$. Donc $(A_p, B) \leq 1/\theta(n)$ pour $p > p_n$. Comme $\theta(n)$ tend vers l'infini avec n, ceci prouve que (A_p, B) tend vers zéro quand p croit indéfiniment.

Réciproquement supposons que des éléments $B, A_1, A_2, \cdots$ soient tels que (B, A_p) tende vers zéro avec $1/p$. Cela veut dire qu'à tout entier r on peut faire correspondre un entier q tel que

$$(A_q, B) < \frac{1}{r}, \qquad (A_{q+1}, B) < \frac{1}{r}, \qquad \cdots;$$

autrement dit $A_q, A_{q+1}, \cdots$ appartiendront aux ensembles $Q_1(B), Q_2(B), \cdots, Q_r(B)$. Tous les éléments limites de la suite $A_1, A_2, \cdots$ appartiendront donc aussi à ces ensembles *qui sont fermés*. Comme r est arbitraire, ces éléments limites coïncideront avec le seul élément commun à $Q_1(B)$, $Q_2(B), \cdots, Q_r(B), \cdots$ à savoir B. D'après la condition 4° imposée à Δ, la suite $A_1, A_2, \cdots$ est donc convergente et tend vers B. Ainsi *la classe* Δ *est bien une classe* (V) (parfaite et compacte). Reste à démontrer qu'elle est *normale.* Or il en est ainsi pour *toute classe* (V) parfaite et compacte. En effet, il n'y a aucune difficulté à prouver qu'une telle classe admet une généralisation du théorème de Cauchy; et d'autre part le fait qu'elle est séparable résulte des théorèmes n$^{\text{os.}}$ 4 et 5 de mon second mémoire* ou tout au moins de leurs démonstrations. C.Q.F.D.

Réciproquement toute classe V normale et compacte est une classe (Δ); *c'est même à votre sens, une classe* (D) *ayant exactement l' "enclosable property."*

En effet, elle satisfait par hypothèse aux conditions 1°, 2°, 3° imposées à Δ. Elle satisfait à 4°. Autrement dit, si tous les éléments limites d'une suite infinie $A_1, A_2, \cdots$ d'éléments de V coïncident, il existe un élément B de V, tel que (B, A_n) tend vers zéro avec $1/n$. En effet, soit B le seul élément limite de la suite. Si (B, A_n) ne tendait pas vers zéro, il existerait un nombre $\epsilon > 0$ et une suite $A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots$ extraite de la suite donnée telle que $(B, A_{n_p}) > \epsilon$ quel que soit p. Mais la classe étant compacte (et sans cette supposition la propriété 4° ne serait plus exacte) on peut extraire de $A_{n_1}, A_{n_2}, \cdots$ une suite $A_{n_1}', A_{n_2}', \cdots$ qui convergerait vers un élément qui serait précisément B d'après l'hypothèse. Donc les quantités (B, A_{n_p}') ne resteraient pas toutes supérieures à ϵ.

Enfin notre classe (V) satisfait à la condition (5°) de Δ et même à l' "enclosable property." Il suffit pour cela d'appeler $Q_1(A)$ la classe elle-même et $Q_i(A)$ l'ensemble de l'ensemble $E_{i+1}(A)$ des éléments B de la classe tels que $(A, B) \leq \alpha_{i+1}$ et de leurs éléments limites. Les nombres α_{i+1} sont des

* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, vol. 30 (1910), p. 3, 4.

nombres > 0 choisis à l'avance indépendamment de A de la façon suivante. Soit $f(\epsilon)$ la fonction qui entre dans la définition du voisinage et soit $\phi(\epsilon)$ le plus grand des deux nombres dont l'un est ϵ, l'autre étant la borne supérieure de f entre 0 et ϵ. Prenons par exemple $\alpha_2 = 1$; puis en général ayant choisi α_i nous prendrons pour α_{i+1} un nombre > 0, inférieur à $\frac{1}{2}\alpha_i$ et tel que $\phi(\phi(\alpha_{i+1})) < \alpha_i$, ce qui est toujours possible puisque $\phi(\epsilon)$ tend vers zéro avec ϵ. Les nombres $\alpha_2, \alpha_3, \cdots$ vont donc en décroissant et tendent vers zéro. De plus les éléments limites C de $E_{i+1}(A)$ vérifient évidemment $(A, C) \leq f(\alpha_{i+1})$. Donc tous les éléments de $Q_{i+1}(A)$ ont avec A un voisinage au plus égal à $\phi(\alpha_{i+1})$. Il est bien évident que $Q_{i+1}(A)$ appartient à $Q_i(A)$ et que les ensembles $Q(A)$ ont un seul élément commun qui est A, enfin que A est intérieur à tous les $Q(A)$. Soit maintenant m un entier quelconque; si on prend n assez petit pour que $\phi(\phi(\alpha_n)) < \alpha_m$, la condition b) de 5° sera vérifiée. En effet, si B, C appartiennent à $Q_n(A)$, on a $(A, B) \leq \phi(\alpha_n)$, $(A, C) \leq \phi(\alpha_n)$, donc $(B, C) \leq \phi(\phi(\alpha_n)) \leq \alpha_m$, c'est à dire que tout élément C de $Q_n(A)$ appartient à $Q_m(B)$.

Pour montrer que notre classe (V) est une classe (Δ), il reste à prouver que les ensembles $Q_i(A)$ sont fermés ce qui est évident puisque $Q_{i+1}(A) = E_{i+1}(A) + E'_{i+1}(A)$.

Mais nous voulons même prouver que V a l' "enclosable property":

1° il faut montrer en outre que $Q_{i+1}(A)$ est intérieur à $Q_i(A)$. Or considérons une suite $B_1, B_2, \cdots$ d'éléments tendant vers un élément B de $Q_{i+1}(A)$; on aurait $(A, B) \leq \phi(\alpha_{i+1})$ et par suite pour n assez grand $(A, B_n) \leq \phi(\phi(\alpha_{i+1})) \leq \alpha_i$, c'est à dire que les B_n appartiendraient à $Q_i(A)$ pour n assez grand.

2° il faut montrer que dans la propriété b), $Q_n(A)$ doit non seulement appartenir à $Q_m(B)$ mais même lui être *intérieur*. Or nous savons choisir n de façon que tout Q_n à qui appartient B appartienne à $Q_{m+1}(B)$; alors il sera intérieur à $Q_m(B)$ d'après ce qui précéde.

Enfin nous savons que, pour toute classe V, tout ensemble dérivé est fermé.

Ainsi *nous voyons que la famille des classes* (D) *ayant l' "enclosable property" forme une partie seulement des classes* (V) *normales, à savoir, exactement l'ensemble de celles-ci qui sont compactes.* Or cette limitation qui n'a pas une valeur négligeable dans le cas des ensembles linéaires, devient très importante dans le cas d'espaces fonctionnels plus compliqués. Par exemple, imposer à un ensemble de fonctions continues (dont la classe est (V) normale) la condition d'être compact n'astreint pas à considérer des fonctions seulement bornées dans leur ensemble, mais aussi "également continues" au sens d'Arzelà.

POITIERS
le 3 Janvier, 1912.